EXERCICES PREPARATOIRE TD1

EXERCICE 1

A - Négation des propositions

1 - Il existe une voiture rapide qui n'est pas rouge

2 - Le suspect est innocent

3 - Qu'il pleuve ou non, je ne prend pas mon parapluie

4 - L'escargot est un mammifère et il n'est pas un batracien

5 - Le vautour est un ruminant et l'escargot ~~est un~~ n'est pas un carnivore

6 - $\exists \alpha \geq 0, \forall q \in \mathbb{Q}^*$ tel que $q > a$

7 -)

$$\neg(\neg p \wedge q) \equiv p \vee \neg q$$

$$\neg(\neg p \vee q) \equiv p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \vee (q \wedge r)) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r)$$

$$\neg(p \wedge (q \wedge r)) \equiv \neg p \vee (\neg q \vee \neg r)$$

$$\neg(p \Rightarrow \neg q) \equiv p \wedge q$$

$$\neg(p \Leftrightarrow q) \equiv \neg(p \Rightarrow q) \vee \neg(q \Rightarrow p)$$

$$\equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$$

B - Montrons par la table de vérité

- $\neg(p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q)$
- $p \Rightarrow q \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$

p	q	$\neg(p \Rightarrow q)$	$p \wedge \neg q$
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	0	0
0	0	0	0

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

C - Montrons les propriétés suivantes

1) $\neg(\neg p) \equiv p$; 2) $p \wedge p \equiv p$ 3) $p \vee p \equiv p$

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
1	0	1
0	1	0

p	p	$p \wedge p$
1	1	1
0	0	0

p	p	$p \vee p$
1	1	1
0	0	0

5) $(p \vee q) \equiv q \vee p$ 6. $[(p \wedge q) \wedge r] \equiv [p \wedge (q \wedge r)]$ 9. $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

p	q	r	$[(p \wedge q) \wedge r]$	$p \wedge (q \wedge r)$
1	1	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
1	1	1	0	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	0	1	1

1 a) Faux car sa négation est vraie. qui est

$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \,/\, x+y \le 0$

preuve soit $x \in \mathbb{R}$ cherchons $y \in \mathbb{R} \,/\, x+y \le 0$

posons $y = -x-1$, $x+y = x-x-1 = -1 < 0$

il suffit de prendre $y = -x-1$

b) Vraie preuve soit $x \in \mathbb{R}$ posons $y = -x+1$

$x+y = x-x+1 = 1 > 0$

La négation de (b) est $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \,/\, x+y \le 0$

c) Faux car pour $x = 5$, $y = -7$ $x+y = -2 < 0$

La négation de (c) est: $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \,/\, x+y \le 0$

d) Vraie

La négation est: $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \,/\, y^2 \le x$

EXERCICE 3

1. pière n'aime pas Marie et Marie aime pière
2. pière n'aime pas Marie et Marie n'aime pas pière
3. pière n'aime pas Marie ou Marie aime pière
4. pière n'aime pas Marie et Marie n'aime pas pière
5. pière n'aime pas Marie alorsque Marie aime pière
6. pière aime Marie et Marie n'aime pas pière
7. pière n'aime pas Marie ou Marie n'aime pas pière

EXERCICE 4

Negation des propositions suivantes

$$\neg\left[[(p \Rightarrow q) \vee r] \wedge (p \vee q)\right] \equiv \neg[(p \Rightarrow q) \vee r] \vee \neg(p \vee q)$$

$$\equiv [(p \wedge \neg q) \wedge r] \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\neg\left[[(p \wedge q) \vee r] \Rightarrow (p \wedge r)\right] \equiv [(p \wedge q) \vee r] \wedge (\neg p \vee \neg r)$$

$$\equiv$$

$$\neg\left[(\neg p \vee \neg q) \wedge \neg(p \wedge q)\right] \equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \vee (p \wedge q)$$

$$\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge q)$$

$$\equiv p \wedge q$$

$$\neg\left[\neg(p \Rightarrow q)\right] \equiv p \Rightarrow q$$

$$\equiv \neg p \vee q$$

EXERCICE 5

EXERCICE 6

1- Mq $\sum_{K=0}^{n} K = \frac{n(n+1)}{2}$

Soit (P_n) la propriété définie sur $n \in \mathbb{N}$ par

(P_n) vraie $\Leftrightarrow 0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

pour $n = 0$ on a $0 = \frac{0(0+1)}{2}$ donc P_0 est vraie

Supposons (P_K) $K \in \mathbb{N}^*$ vraie et Dmq (P_{K+1}) est aussi vraie

(P_K) vraie $\Leftrightarrow 0 + 1 + 2 + \dots + K = \frac{K(K+1)}{2}$ à l'ordre $K+1$,

on a : $0+1+2+\dots+K+K+1 = \frac{K(K+1)}{2} + K + 1$

$$= \frac{K(K+1)+2(K+1)}{2}$$

$$= \frac{(K+1)(K+2)}{2}$$

donc P_{K+1} est aussi vraie.

Ainsi d'après le principe de recurrence (P_n) vrai $\forall n \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\sum_{K=0} K = 0+1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. Mq $\sum_{K=1}^{n} (2K-1) = (2(1)-1) + (2(2)-1) + \dots + (2(n)-1) = n^2$

$\sum_{K=1}^{n} 2K-1 = \cancel{(2-1)+1} = \sum_{K=1}^{n} 2K - \sum_{K=1}^{n} 1$

$$= 2\sum_{K=1}^{n} K - \sum_{K=1}^{n} 1 = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n$$

d'où $\sum_{K=1}^{n} (2K-1) = n^2$

3. Mq $\sum_{K=1}^{n} K^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

De m̄ qu'à la question 1, on a :

pour $n = 1$ $\quad 1 = \frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6}$ donc (P_1) est vraie

à l'ordre $K+1$ on a :

$$1^2+2^2+\cdots+K^2+(K+1)^2 = \frac{K(K+1)(2K+1)}{6} + (K+1)^2$$

$$= \frac{K(K+1)(2K+1)+6(K+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(K+1)[2K^2+7K+6]}{6}$$

$$= \frac{2(K+1)(K+2)(K+\frac{3}{2})}{6}$$

$$= \frac{(K+1)(K+2)(2K+3)}{6}$$ d'où (P_{K+1}) est vraie

Ainsi d'après le principe de récurrence (P_K) est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{K=1}^{n} K^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

EXERCICE 7

A) Montrons par contraposé que

1. $x \neq 2$ et $y \neq 2 \Rightarrow xy - 2x - 2y + 4 \neq 0$

Supposons que $xy - 2x - 2y + 4 = 0$ et mq $x = 2$ ou $y = 2$

$$xy - 2x - 2y + 4 = 0 \Rightarrow (x-2)(y-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ \text{ou} \\ y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ \text{ou} \\ y=2 \end{cases} \quad \square$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$ n^2 pair $\Rightarrow$ n pair

Supposons que n impair et mq n^2 est aussi impair

n impair $\Rightarrow \exists K \in \mathbb{Z} \;/\; n = 2K+1$

$$n^2 = (2K+1)^2$$
$$= 4K^2 + 4K + 1$$
$$= 2(2K^2+2K)+1$$
$$n^2 = 2K' + 1 \quad \text{avec } K' = 2K^2 + 2K$$

Ainsi n impair $\Rightarrow$ n^2 impair donc n^2 pair $\Rightarrow$ n pair

EXERCICE 8

Dmq $\sqrt{2}$ est irrationnel

par l'absurde, supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$

tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow p^2 = 2q^2$

$$\begin{cases} p \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists \alpha_i \Big|_{i=1}^{n} \;/\; p = 2^{\alpha_1} \times 3^{\alpha_2} \times 5^{\alpha_3} \times \cdots \\ q \in \mathbb{Z}^* \Rightarrow \exists \beta_i \Big|_{i=1}^{n} \;/\; q = 2^{\beta_1} \times 3^{\beta_2} \times 5^{\beta_3} \times \cdots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p^2 = 2^{2\alpha_1} \times 3^{2\alpha_2} \times 5^{2\alpha_3} \times \cdots \\ 2q^2 = 2^{2\beta_1+1} \times 3^{2\beta_2} \times 5^{2\beta_3} \times \cdots \end{cases}$$

$$p^2 = 2q^2 \Longrightarrow 2^{2\alpha_1} = 2^{2\beta_1+1}$$

$$\Rightarrow 2\alpha_1 = 2\beta_1 + 1 \;\; ↯ \;\; \text{car}$$

$2\alpha_1$ est pair et $2\beta_1 + 1$ est impair donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

• Mq $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel

Par l'absurde, supposons que $\frac{\ln 2}{\ln 3} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists\, p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$

tel que $\frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{p}{q} \Rightarrow q \ln 2 = p \ln 3$

$$\Rightarrow \ln 2^q = \ln 3^p$$

$$\Rightarrow 2^q = 3^p \quad \lightning \text{ car}$$

2 et 3 sont premiers entre eux donc $\frac{\ln 2}{\ln 3} \notin \mathbb{Q}$